MATRIZES: INTRODUÇÃO E NOTAÇÃO GERAL

Introdução

A teoria das matrizes tem cada vez mais aplicações em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo de matriz.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

Aluno	**Química**	**Inglês**	**Literatura**	**Espanhol**
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno B em literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Um exemplo de aplicação prática da teoria das matrizes pode ser visto nas próximas páginas.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo, acima, nas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{r} \text{linha} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{8\ 7\ 8\ 8}} \\ 6\ 6\ 7\ 6 \\ 4\ 8\ 5\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & \mathbf{7} & 9 & 8 \\ 6 & \mathbf{6} & 7 & 6 \\ 4 & \mathbf{8} & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os *elementos*. As linhas são enumeradas de *cima para baixo* e a colunas, *da esquerda para a direta*:

$$\begin{array}{r} 1^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow \\ 2^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow \\ 3^{\underline{a}} \text{ linha} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$3^{\underline{a}}$ coluna
$2^{\underline{a}}$ coluna
$1^{\underline{a}}$ coluna

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas *matrizes m x n*. Na tabela acima temos uma matriz 3 X 3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

Notação Geral

Costuma-se apresentar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas* acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elementos ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m X n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a}_{23}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

$$\text{Na matriz } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{temos}: \begin{cases} a_{11} = 2,\ a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = 5 \\ a_{21} = 4,\ a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

Exercícios Resolvidos

1. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Solução:

Sendo **A** do tipo $\underset{\text{linha}}{2} \times \overset{\text{coluna}}{2}$, a matriz associada é da forma: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Como a_{ij} = = 2i e j, temos:

$a_{11} = 2 . 1 + 1 = 3$ (pois i = 1 e j = 1) $\qquad a_{21} = 2 . 2 + 1 = 5$

$a_{12} = 2 . 1 + 2 = 4$ $\qquad a_{22} = 2 . 2 + 2 = 6$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{5 \times 7}$ tal que $aij = \begin{cases} -i^2, \text{se } i + j \text{ é par} \\ 2ij, \text{ se } i + j \text{ é impar} \end{cases}$, determine $a_{32} + a_{42}$

Solução:

$a_{32} = 2 . 3 . 2 = 12$

$a_{42} = - 4^2 = -16$

Logo, $a_{32} + a_{42} = 12 – 16 \Rightarrow a_{32} + a_{42} = -4$

Exercícios Propostos

1. Determine as seguintes matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $aij = (i – j)^2$

b) $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $b_{ij} = (i – j)^3$

c) $C = (c_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $c_{ij} = \begin{cases} 2, \text{se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

d) $D = (d_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $d_{ij} = \begin{cases} i^2 - j^2, \text{se } i + j \text{ é par} \\ i^2 + j^2, \text{se } i + j \text{ é ímpar} \end{cases}$

2. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + 2j – 5$, calcule $a_{12} + a_{31}$.

TIPOS DE MATRIZES

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz Linha**: matriz do tipo 1 X n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz A = [4 7 -3 1], do tipo 1 X 4.
- **Matriz Coluna**: matriz do tipo m X 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo B = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3 X 1.
- **Matriz Quadrada**: matriz do tipo n X n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de *ordem* **n**. Por exemplo, a matriz C = $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 X 2, isto é quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a *diagonal principal* e a *diagonal secundária*. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tal que i = j. Na secundária i + j = n + 1.

Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal secundária

diagonal principal

a_{11} = -1 é elementos da diagonal principal, pois i = j = 1

a_{31} = 5 é elementos da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)

- **Matriz Nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$. Por exemplo, $0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- **Matriz Identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:
-

a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

- **Matriz Oposta**: matriz **–A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

- **Matriz Transposta**: matriz $\mathbf{A^t}$ obtida a partir da matriz **A** trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m X n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n X m.

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de **A** corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

- **Matriz Simétrica**: matriz quadrada de ordem **n** tal que $A = A^t$. Por exemplo,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos $a_{ij} = a_{ji}$.

Exercício Resolvido

Classifique as matrizes dadas quanto ao tipo e à ordem.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ matriz quadrada de ordem 2.

b) B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ matriz linha do tipo 1 X 3.

c) C = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ matriz coluna do tipo 3 X 1.

d) D = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ matriz identidade de ordem 3 (I_3).

Exercício Propostos

1. Determine o tipo e indique a denominação de cada matriz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, determine a transposta de **A**.

3. Sendo a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & c \\ 3 & 4 & y \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ simétrica, determine **c** e **y**.

IGUALDADE E MATRIZES E OPERAÇÕES

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes, **A** e **B**, do mesmo tipo m X n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le j \le n$

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e A = B, então c = 0 e b =3

Operações Envolvendo Matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chamamos de *soma* dessas matrizes e matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e todo $1 \le j \le n$:

$$\mathbf{A + B = C}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.*

Subtração

Dadas as matrizes $a = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chamamos de *diferença* entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Exercício Resolvidos

1. Calcule **x**, **y** e **z** tal que $\begin{bmatrix} x^2-1 & 0 & x \\ 0 & y^2-4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$.

Solução:

De igualdade vem:

$$\begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ (não convém)} \\ x=1 \\ y^2-4=0 \Rightarrow y=2 \text{ ou } j=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

Logo, x = 1, y = $\pm$ 2 e z = 1.

2. Sendo A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B b) A- B c) $A^t + B^t$ d) $(A + B)^t$

Solução:

a) A + B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3-1 \\ 1-2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

b) A – B = A + (- B) =

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 3+1 \\ 1+2 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $A^t + B^t$

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Assim:

$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 1-2 \\ 3-1 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

d) $(A+B)^t$

Como A + B = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$, então $(A+B)^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

Comparando os itens **c** e **d**, podemos notar que: $(A+B)^t = A^t + B^t$

Exercícios Propostos

1. Determine **a**, **b** e **c** tal que $\begin{bmatrix} a^2 \\ |b| \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$.

2. Determine **x**, **y**, **z** e **w** nas matrizes

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e C $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ z & w \end{bmatrix}$, tal que A = B = C

3. Determine **x** e **y** tal que: $\begin{bmatrix} 2x+3y & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5x+2y \end{bmatrix}$.

4. Calcule o valor de **x** tal que $\begin{bmatrix} x^2 - 3x \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ x^2 \end{bmatrix}$.

5. Sendo A = $(a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + j$, determine **x**, **y** e **z** tal que A = $\begin{bmatrix} 2 & y-1 \\ x & z \end{bmatrix}$.

6. Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B b) A – B c) B - A

7. Calcule **x**, **y** e **z** tal que $\begin{bmatrix} 2x & z \\ x-y & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2z \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Sendo A = $(a_{ij})_{3 \times 2}$, com $a_{ij} = 2i - j$, e B = $(bij)_{3 \times 2}$, com $b_{ij} = i^2 + j$, calcule:

a) A – B b) B - A

9. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, determine o valor de :

a) $A^t + B^t$ b) $(A + B)^t$

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Dado um número real **x** e uma matriz **A** do tipo m X n, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo m X n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

B = xA

Observe o seguinte exemplo: $3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 7 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios Resolvidos

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

a) $\frac{1}{3}A$ b) –3B c) 2A – 3B

Solução:

a) $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 1 & \frac{1}{3}\cdot 2 \\ \frac{1}{3}\cdot 0 & \frac{1}{3}\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $-3B = -3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.4 & -3(-1) \\ -3.0 & -3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

c) 2A – 3B = 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Determine a matriz **X**, tal que X + A = 3B, par $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Aplicando as propriedade das matrizes, temos: X = 3B – A

Logo: $X = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. Sendo A = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes **X** e **Y** tal que 3Y – Y = 2A – B e X + Y = A – B.

Solução:

$$\begin{cases} 3X - \cancel{Y} = 2A - B \\ \ X + \cancel{Y} = A - B \end{cases} +$$

$$4X = 3A - 2B \Rightarrow X = \frac{1}{4}(3A - 2B) = \frac{3}{4}\,.\,A - \frac{1}{2}\,.\,B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{9}{4} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De X + Y = A – B, vem:

$$Y = A - B - X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Se A = $\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & c \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine **a**, **b** e **c** sabendo que $2A = (3B)^t$.

Solução:

$$2A = (3B)^t \Rightarrow 2\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & c \end{bmatrix} = \left(3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 6 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 6 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo, **a** = 6, **b** = 0 e **c** = $\frac{3}{2}$

Exercícios Propostos

1. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) 5A b) 7B c) 3A – 4B d) $-\frac{3}{2}$ A

2. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$, calcule:

a) 3(A – B) +3 (B – C) + 3 (C- A)

b) 2(A + B) –3 (B - C) – 3C

3. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule X = 2A – 3B^t.

4. Dadas as matrizes A $(a_{ij})_{2 \times 2}$, com $a_{ij} = i^2$ e j^2, e B = $(b_{ij})_{2 \times 2}$, com $b_{ij} = i^j$, calcule $\frac{1}{2}$A + B^t.

5. Sendo A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e B = -2A, determine a matriz **X** tal que 2X – 3A = $\frac{1}{2}$B.

6. Sendo A = $(a_{ij})_{2 \times 2}$, em que a_{ij} = 2i – j e B = $(bij)_{2 \times 2}$, em que b_{ij} = j – i, determine X tal que 3A + 2X = 3B.

7. Sendo A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$, calcule as matrizes **X** e **Y** no sistema

$$\begin{cases} 2X + Y = B \\ 3X + 2Y = A \end{cases}$$

8. Se A = $\begin{bmatrix} x & y \\ 5 & z \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, determine os valores de **x**, **y** e **z** sabendo que 2A = B^t.

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

O produto de uma matriz por outra *não* é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{c_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1.(-1) + 2.4}} & \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \overset{c_{12}}{\boxed{1.3 + 2.2}} \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3.(-1) + 4.4}} & \underline{\qquad} \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & \underset{c_{22}}{\boxed{3.3 + 4.2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A . B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$B\ .\ A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).1+3.3 & (-1).2+3.4 \\ 4.1+2.3 & 4.2+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, A . B $\neq$ B . A, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A\ .B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m \times \mathbf{p}}\ .\ B_{\mathbf{n} \times n} = (A\ .\ B)_{m \times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A** (**m**) e o número de colunas de **B** (**n**):

- se $A_{3 \times \mathbf{2}}$ e $B_{\mathbf{2} \times 5}$, então $(A\ .\ B)_{3 \times 5}$
- se $A_{4 \times \mathbf{1}}$ e $B_{\mathbf{2} \times 3}$, então não existe o produto

$\neq$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o produto de $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, se existir.

Solução:

Inicialmente, devemos verificar se é possível multiplicar as matrizes. A 1ª matriz é do tipo 2 X 3 e a 2ª, do tipo 3 X 1. Como o número de colunas da 1ª é igual ao número de linhas da 2ª, o produto é possível e a matriz resultante é do tipo 2 X 1:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 + 2.0 + (-3)\,5 \\ 1.\,1 + 4.0\; + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Determine a matriz **X** tal que X . A = B, sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução:

Como a matriz **X** é fator de um produto, é necessário, inicialmente, determinar o seu tipo.

Assim, se X . $A_{2 \times 2}$ = $B_{2 \times 2}$, então **X** é do tipo 2 X 2. Logo, X = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Daí: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2b & a \\ c + 2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Da igualdade de matrizes, temos $\begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} a + 2b = 4 \;\; \text{(I)} \\ c + 2d = 6 \;\; \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo a = 2 em (I) e c = 0 em (II), vem: 2 + 2b = 4 $\Rightarrow$ b =1 e 0 + 2d = 6 $\Rightarrow$ d = 3

Logo, X = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 - 2A$.

Solução:

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

1. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A . B
b) B . A
c) A^2
d) $B^2 - 3B$

2. Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, determine a matriz **X** tal que A . X = B.

3. Dadas as matrizes A = [-2 1 0] e B = $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A . B b) B . A

4. Sendo A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 + 4A - 5I_2$.

5. Seja A = (a_{ij}) a matriz 2 X 2 real, definida por $a_{ij} = 1$, se $i \leq j$; $a_{ij} = -1$, se $i > j$. Calcule A^2.

MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz **A'**, de mesma ordem, tal que A . A' = A' . A = I_n, então **A'** é *matriz inversa* de **A**. Representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$.

Acompanhe o procedimento para determinar uma matriz inversa.

Exercícios Resolvidos

1. Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, determine sua inversa, se existir.

Solução:

Existindo, a matriz inversa é da mesma ordem de **A**.

Como, para que exista inversa, é necessário que A . A' = A' . A = I_n, vamos trabalhar em duas etapas:

1ª) Impomos a condição de que A. A' = I_n e determinamos A':

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas pelo método da adição, vem:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4c = 2 \\ \underline{-2a + c = 0} \end{cases}$$

$$5c = 2 \Rightarrow c = \frac{2}{5}$$

Substituindo o valor obtido para **c** em uma das equações do sistema, temos:

$$a + 2c = 1 \Rightarrow a + 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow a + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} b + 2d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4d = 0 \\ \underline{-2b + d = 1} \end{cases}$$

$$5d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{5}$$

Substituindo o valor obtido para **d** em uma das equações do sistema, temos:

$$b + 2d = 0 \Rightarrow b + 2 \cdot \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$$

Assim:

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2ª) Verificamos se A' . A = I_2:

$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right)(-2) & \frac{1}{5} \cdot 2 + \left(-\frac{2}{5}\right)1 \\ \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5}(-2) & \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Portanto, temos uma matriz **A’** tal que A . A’ = A’ . A = I_2. Assim **A’** é a inversa de **A** e pode ser representa por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2. Determine, se existir, a inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

Se A . A’ = A’ . A = I_2, então A’ = A^{-1}.

Vamos verificar se A . A = I_2:

Fazendo A’ = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, vem:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+2d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 2a+2c=1 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=\frac{1}{2} \quad (I) \\ a+c=0 \quad (II) \end{cases}$$

Comparando as igualdades (I) e (II), observamos que é impossível obter simultaneamente a + c = $\frac{1}{2}$ e a + c = 0

Logo, o sistema *não* tem solução e a matriz **A** não é inversível.

Exercícios Propostos

1. Calcule, se existir, A^{-1} em cada caso.

a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, calcule o produto A . A^{-1}.

3. Sendo A = $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, calcule o elemento a'_{12} da matriz A^{-1}.

4. O produto da inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ pela matriz I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

DETERMINANTES

Como vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo n X n).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem M = $[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$\det M = [a_{11}] = a_{11}$$

Obs. Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

- M = [5] $\Rightarrow$ det M = 5 ou $|5|$ = 5
- M = [-3] $\Rightarrow$ det M = -3 ou $|-3|$ = -3

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem é dado por:

$$\det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

Sendo $M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, temos:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2\;5} - \underbrace{4\;3} = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 10 & -2^2 \\ 1 & 0{,}4 \end{vmatrix}$

Solução:

a) $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \,.\, 4 - 6 \,.\, \frac{1}{3} = 2 - 2 = -4$

b) $\begin{vmatrix} 10 & -2^2 \\ 1 & 0{,}4 \end{vmatrix} = 10 \,.\, 0{,}4 - (-2^2)1 = 4 + 4 = 8$

2. Calcule o valor **x** real na igualdade $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

Solução:

$\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x(x+3) - 4 \,.\, 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 9x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow x = -4$ ou $x = 1$

Exercícios Propostos

1. Calcule o valor do determinante das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt[2]{3} \\ \sqrt{6} & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

2. Calcule o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \log_2 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} tg\,\frac{\pi}{3} & 81 \\ \log_3 \frac{1}{3} & \sqrt{27} \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1^2 & \cos 2\pi \\ 3^0 & 1 \end{vmatrix}$

3. Calcule o valor de x ∈ IR nas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} \frac{x-1}{3} & \frac{1}{9} \\ 18 & \frac{x+1}{2} \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} \cos x & 4 \\ 2 & 2^4 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \log_2 x & 16 \\ 4 & 128 \end{vmatrix} = 0$

4. Se $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ x & 4 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}$ e B = A^t, então det (A . B) vale:

a) 8. b)4. c)2. d)-2. e) – 4.

5. O conjunto solução de $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) $\{x \in IR \ / \ x \neq 1\}$. b) {0,1}. c) {1}. d) {-1} e){0}

DETERMINATES: REGRA DE SARRUS

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus*.

Acompanhe como aplicamos essa regra para D = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg|$$

2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

$$\begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & & \\ & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg| + (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

paralela

diagonal principal

3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

paralelas

diagonal secundária

Assim:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right| = -47$$

-3 –8 -12

2 –18 -8

2. Calcule o valor **x** na igualdade $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

Solução:

Aplicando a regra de Sarrus, temos:

$3 + 0 + x^2 - (-1 + 3x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$

3. Resolva em IR a inequação $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

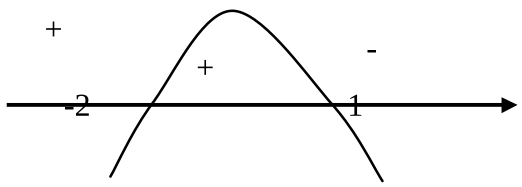
Solução:

Aplicando a regra de Sarrus, temos:

$2 + 0 + 0 - (x^2 + x + 0) < 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2 < 0$

Resolvendo a inequação do 2º grau e estudando o seu sinal, vem:

$-x2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{+1 \pm 3}{-2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$



Então, S = {$x \in$ IR/ $x < -2$ ou $x > 1$}.

Exercícios Propostos:

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) det A b) det A’

2. Sendo $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = 2i - j$, calcule det A.

3. Calcule o valor dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & -1^2 & 1 \\ \log 1 & 0 & -1 \\ \cos\frac{3\pi}{2} & 2^{-1} & 3^0 \end{vmatrix}$

4. Calcule o valor de **x** real:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 0 & 1 \\ 3x & x & 1 \\ x & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \leq 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ x & x & 4 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

5. O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} y & 2 & 1 \\ 0 & 2y & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é igual à maior das raízes da equação $|10 + x| = 2$. Determine o menor valor de y.

SISTEMAS LINEARES

Equação Linear

Equação linear é toda equação da forma $\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ...a_nx_n = b}$ em que $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ... a_n}$ são números reais, que recebem o nome de *coeficientes das incógnitas* $\mathbf{x_1, x_2, x_3,... x_n}$, e **b** é um número real chamado termo independente.

Veja alguns exemplos de equações lineares:

- $3x – 2y + 4z = 7$
- $- 2x + 4z = 3t – y +4$

As equações a seguir não são lineares:

- $xy – 3z + t = 8$
- $x^2 – 4y = 3t – 4$
- $\sqrt{x} -2y +z = 7$

Sistema Linear

Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 & + \ldots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 & + \ldots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 & + \ldots + & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas.

A solução de um sistema linear é a *n-upla* de números reais ordenados $(r_1, r_2, r_3, ..., r_n)$ que é simultaneamente, solução de todas as equações do sistema.

Matrizes Associadas a um Sistema Linear

A um sistema linear podemos associar as seguintes matrizes:

- matriz incompleta: a matriz **A** formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

Em relação ao sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + z = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ a matriz incompleta é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- matriz completa: matriz **B** que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

Assim, para o mesmo sistema acima, a matriz completa é:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Sistemas Homogêneos

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes das equações são nulos. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ \sqrt{2} + 3y = 0 \end{cases}$$

A n-upla (0,0,0, ...,0) é sempre solução de um sistema homogêneo com **n** incógnitas e recebe o nome de *solução trivial*. Quando existem, as demais soluções são chamadas não triviais,

Sistema Normal

Um sistema normal quando tem o mesmo número de equações (**m**) e de incógnitas (**n**) e o determinante da matriz incompleta associada ao sistema é diferente de zero.

Se m = n e det A $\neq$ 0, então o sistema é normal.

Exercícios Resolvidos:

1. Verifique quais dos seguintes sistemas são normais:

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x-z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ t+w=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-5z=1 \\ 3x+4y-4z=7 \end{cases}$

Solução:

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y-z=2 \\ 3x-z=4 \end{cases}$

m = 3, n = 3 $\Rightarrow$ m = n (I)

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (II)

De (I) e (II), concluímos que o sistema é normal.

c) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-5z=1 \\ 3x+4y-4z=7 \end{cases}$

m = 3, n = 3 $\Rightarrow$ m = n

$\det C \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Logo, o sistema não é normal.

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ t+w=5 \end{cases}$

m = 3, n = 5 $\Rightarrow$ m $\neq$ n

Logo, o sistema não é normal.

2. Determine k $\in$ R de modo que o sistema $\begin{cases} kx+y=3 \\ x+ky=5 \end{cases}$ seja normal.

Solução:

1ª. condição: det A $\neq$ 0

$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2-1 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$

2ª condição: m = n

No sistema, o número de equações (2) é igual ao número de incógnitas (2).

Logo, o sistema é normal para qualquer k real diferente a 1 a de –1.

Exercícios Propostos

1. Verifique se os sistemas são normais.

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$

2. Determine os valores de k $\in$ R para que os sistemas sejam normais.

a) $\begin{cases} (k-1)x + 4y = 2k \\ (k+1)x - 2y = 1 + 3k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + 2y + 3z = 7 \\ k^2 x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$

SISTEMAS LINEARES: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NORMAIS

Regra de Cramer

Todo sistema normal tem uma única solução dada por:

$$\mathbf{x_i = \frac{D_{x_i}}{D}}$$

em que i $\in \{1, 2, 3 \cdots, n\}$, D= det A é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema, e D_{x_i} é o determinante obtido pela substituição, na matriz incompleta, da coluna **i** pela coluna formada pelos termos independentes.

A regra de Cramer é um instrumento importante para a resolução de sistemas normais. Acompanhe a sua aplicação.

Exercícios Resolvidos

1. Resolva, com o auxílio da regra de Cramer, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Solução:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ $\quad D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$

m = n = 2

Como o sistema é normal, podemos utilizar a regra de Cramer para resolvê-lo.

Substituindo, na matriz incompleta $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$, a coluna formada pelos termos independentes, encontramos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 3 = -24$$

Substituindo, agora, **C_2** pela coluna dos termos independentes, encontramos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8$$

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-8} = 3 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Logo, (x, y) = (3, 1) é a solução do sistema dado.

b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$ $\quad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

m = n = 3

Como o sistema é normal, podemos utilizar a regra de Cramer:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{3} = -1 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{3} = 1$$

Logo, (x, y, z) = (1, -1, 1) é a solução do sistema dado.

2. Resolva o sistema linear homogêneo $\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$

Solução:

m = n = 3

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 4 - 1 + 9 + 8 = 29 \neq 0$$

O sistema é normal, apresentando uma única solução. Mas, como ele também é homogêneo e todo sistema homogêneo tem pelo menos a solução trivial (0 ,0, 0), essa será a solução única.

Logo, (x, y, z) = (0, 0, 0).

Exercícios Propostos

1. Resolva os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 8z = -5 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 9 \\ 3x - y + 4z = -5 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

2. Determine o valor de **z** no sistema: $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ -4x + 3y + 2z = 2 \\ 5y - 3z = 6 \end{cases}$

3. Determine **x, y** e **z** no sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

CLASSIFICAÇÃO E DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Classificação de um sistema quanto ao número de soluções

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$, encontramos uma única solução: o par ordenado (3, 5).

Assim, dizemos que o sistema é *possível* (tem solução) e *determinado* (solução única).

No caso do sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$, verificamos que os pares ordenados (0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3),$\cdots$ são algumas de suas infinitas soluções. Por isso, dizemos que o sistema é *possível* (tem solução) e *indeterminado* (infinitas soluções).

Para $\begin{cases} x + y = 10 \\ -x - y = 10 \end{cases}$, verificamos que nenhum par ordenado satisfaz simultaneamente as equações. Portanto, o sistema é *impossível* (não tem solução).

Discussão de um sistema linear

Se um sistema tem **n** equações e **n** incógnitas, ele pode ser:

a) *possível* e *determinado*, se D = det A $\neq 0$; caso em que a solução é *única*.

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \Rightarrow m = n = 3 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases} \quad \text{e} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Então o sistema é possível e determinado, tenso solução única.

b) *possível* e *indeterminado*, se D = $D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = \cdots = D_{x_n}$ = 0, para n = 2. Se n $\geq$ 3, essa condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes e termos independentes não-proporcionais.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

D = 0, D_x = 0, D_y = 0 e D_z = 0

Assim, o sistema é possível e indeterminado, tendo infinitas soluções.

c) *impossível*, Se D = 0 e $\exists\ D_{x_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$; caso em que o sistema não tem solução. Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$

Como D = 0 e $D_x = \neq 0$, o sistema é impossível e não apresenta solução.

Exercícios Resolvidos

1. Verifique para quis valores de **k** o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ky = 2 \end{cases}$ é:

a) possível e determinado; b) possível é indeterminado.

Solução:

a) O sistema é possível e determinado se $D \neq 0$. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

b) O sistema é possível e indeterminado se $D = D_x = D_y = 0$.

Como $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, então $\nexists\ k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema seja possível e indeterminado.

2. Determine **p** de modo que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ px + y = 4 \end{cases}$ seja impossível.

Solução:

Para que o sistema impossível, devemos ter D = 0 e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$.

Assim:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ p & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2p \qquad D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ p & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3p$$

Como D = 0, temos: $3 - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$

Sendo $D_x = -5 \neq 0$, o sistema é impossível para $p = \frac{3}{2}$

Exercícios Propostos

1. Classifique o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ -2x - 2z = 1 \end{cases}$

2. Classifique o sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$

3. Determine para que valores de **m** o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = m \end{cases}$ é:

a) impossível; b) possível e indeterminado.

4. Classifique os sistemas a seguir e resolva apenas os possíveis e determinados:

a) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$

5. O valor de **m** para que o sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ seja indeterminado é:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

6. O sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

a) tem uma única solução. b) não tem soluções reais.

c) tem três soluções distintas. d) tem infinitas soluções reais.

SISTEMAS LINEARES: EQUIVALENTES E ESCALONADOS

Sistemas equivalentes

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Por exemplo, dados os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{e} \qquad S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Verificamos que o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$ são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

Propriedades

a) Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos outro sistema equivalente.

Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x - 3y = 2 & \text{(I)} \\ 2x + y = 3 & \text{(II)} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad S_2 = \begin{cases} 2x + y = 3 & \text{(I)} \\ x - 3y = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

b) Multiplicando uma ou mais equações de um sistema por um número k ($k \in \mathbb{R}^*$), obtemos um sistema equivalente ao anterior. Por exemplo:

$$S_1 = \begin{cases} x + 2y = 3 & \text{(I)} \\ x - y = 0 & \text{(II)} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \text{multiplicando a} \\ \text{equação (II) por 3} \end{matrix} \qquad S_2 = \begin{cases} x + 2y = 3 & \text{(I)} \\ 3x - 3y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$

c) Adicionado a uma das equações de um sistema o produto de outra equação desse mesmo sistema por um número **k** ($k \in \mathbb{R}^*$), obtemos um sistema equivalente ao anterior

Por exemplo:

Dado $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 4 & \text{(I)} \\ x - y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$ e substituindo a equação (II) pela soma do produto de (I) por –1 com (II), obtemos:

$$S'_1 = \begin{cases} -x - 2y = -4 \\ \quad x - y = 1 \\ \hline \quad\quad -3y = -3 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \quad -3y = -3 \end{cases}$$

$S_1 \sim S_2$, pois (x, y) = (2, 1) é solução de ambos os sistemas.

Sistemas escalonados

Utilizamos a regra de Cramer para discutir e resolver sistemas lineares em que o número de equações **(m)** é igual de incógnitas (**n**). Quando **m** e **n** são maiores que três, torna-se muito trabalhoso utilizar essa regra. Por isso , usamos a ***técnica de escalonamento***, que facilita a discussão e a resolução de quaisquer sistemas lineares.

Dizemos que um sistema, em que existe pelo menos um coeficiente não-nulo em cada equação, está escalonado se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não-nulo aumenta de equação para equação.

Exemplos:

$$S_1 = \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \quad y + z = 1 \\ \quad 4z = 2 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ \quad -y - 4z + t = 1 \\ \quad 2z - 6t = 30 \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 2x + \quad 4z = 1 \\ \quad y + 2z = 4 \end{cases} \qquad S_4 = \begin{cases} 2x + 3y + 2z - w = 5 \\ \quad z + 3w = 1 \end{cases}$$

Os sistemas S_1, S_2, S_3 e S_4 estão na forma escalonada.

Técnica do escalonamento

Para escalonar um sistema adotamos o seguinte procedimento:

a) Fixamos como 1ª equação uma das que possuem o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

b) Utilizando as propriedades de sistemas equivalentes, anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnitas das demais equações.

c) Anulamos todos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação.

d) Repetimos o processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Vamos então aplicar a técnica do escalonamento. Veja os exemplos:

Exemplo 1: $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

Trocamos de posição a 1ª equação com a 2ª equação, de modo que o 1º coeficiente de **x** seja igual a 1:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 & \cdot\ (-2) \\ 2x - 3y - z = 4 & \oplus \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 & \cdot\ (-3) \\ -7y - 3z = -2 & \oplus \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 & \cdot\ (-1) \\ -7y - 3z = -2 & \oplus \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 & \text{(I)} \\ -7y - 3z = -2 & \text{(II)} \\ -2z = -6 & \text{(III)} \end{cases}$$

O sistema está escalonado. Como m = n e a última equação –2z = -6 tem solução única, o sistema é *possível e determinado*.

Exemplo 2: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 & \cdot\ (-2) \\ 2x + y + z = 1 & \oplus \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - z = -5 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 & \cdot\ (-3) \\ \quad 5y - z = -5 & \oplus \\ 3x - y + 2z = 2 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ \quad 5y - z = -5 \\ \quad 5y - z = -7 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 & \cdot\ (-1) \\ \quad 5y - z = -5 & \oplus \\ \quad 5y - z = -7 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 & \text{(I)} \\ \quad 5y - z = -5 & \text{(II)} \\ \qquad 0z = -2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Ao escalonar o sistema, notamos que sua última equação 0z = -2 não admite nenhum valor real para **z** que satisfaça igualdade. Logo, o sistema é *impossível*.

<u>Observação</u>: Sempre que ao escalonar um sistema linear encontrarmos uma equação do tipo $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$, com $b \neq 0$, o sistema será impossível.

Exemplo 3: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases}$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & \cdot\ (-2) \\ 2x + 3y - 2z = 4 & \oplus \\ 3x + 4y - z = 6 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y - 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & \cdot\ (-3) \\ \quad y - 4z = 0 & \oplus \\ 3x + 4y - z = 6 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y - 4z = 0 \\ \quad y - 4z = 0 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & \cdot\ (-1) \\ \quad y - 4z = 0 & \oplus \\ \quad y - 4z = 0 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 & \text{(I)} \\ \quad y - 4z = 0 & \text{(II)} \\ \qquad 0z = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

O sistema está escalonado e sua última equação 0z = 0 é verdadeira para qualquer valor real de **z** (infinitas soluções). Logo, o sistema é *possível e indeterminado*.

Observação: Neste último exemplo, suprimindo-se a 3ª equação 0z = 0, teremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad y - 4z = 0 \end{cases}$$

Sempre que um sistema na forma escalonada tiver o número de equações menor que o número de incógnitas (m < n), ele será *possível e indeterminado*.

Exemplo 4: $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$

1º passo: Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita a partir da 2ª equação:

$$\begin{cases} x + y - z = -2 & \cdot\ (-2) \\ 2x + 2y - z = 1 & \leftarrow \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ \qquad z = 5 \end{cases}$$

O sistema está escalonado e o número de equações é menor que o número de incógnitas (m < n), então o sistema é *possível e indeterminado*.

Observação: Note que o mesmo sendo z = 5 solução única, ao substituirmos esse valor em x +y - z = 2, teremos: x + y – z = -2 $\Rightarrow$ x + y = 3, possuindo essa equação infinitas soluções, tornando assim o sistema possível e indeterminado.

Exercício Proposto

Escalone e classifique os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 4x + 9y + 4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1-2x}{-3y} = \dfrac{7y-2}{x-3} = 1 \end{cases}$

SISTEMAS LINEARES: ESCALONAMENTO

Apresentaremos neste módulo a resolução de alguns sistemas lineares aplicando a técnica do escalonamento.

Exercício Resolvido

Resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - 7y - z = -9 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 6y - 7z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 4z = 19 \\ x - y + 5z = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

Solução:

a) Vamos escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 8 & \cdot\ (-2) \\ 2x - 7y - z = -9 & \oplus \\ x + 2y - z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 8 & \cdot\ (-1) \\ -y - 5z = -25 & \\ x + 2y - z = -7 & \oplus \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 8 \\ -y - 5z = -25 & \cdot\ (5) \\ 5y - 3z = -15 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 8 & \text{(I)} \\ -y - 5z = -25 & \text{(II)} \\ -28z = -140 & \text{(III)} \end{cases}$$

A última equação do sistema escalonado –28z = -140 tem solução única e como m = n, o sistema é possível e determinado . Sua solução é:

-28z = -140 $\Rightarrow$ z = 5. Substituindo z = 5 em (II), vem:

-y – 5 . 5 = -25 $\Rightarrow$ -y – 25 = -25 $\Rightarrow$ y = 0

Substituindo z = 5 e y = 0 em (I), temos:

x – 3 . 0 +2 . 5 = 8 $\Rightarrow$ x + 10 = 8 $\Rightarrow$ x = -2

Portanto, x = -2 y = 0 e z = 5 e S = {(-2, 0, 5)}.

b) Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 6 & .\ (-3) & .(-2) \\ 3x - y + 2z = 1 & \oplus & \\ 2x + 6y - 7z = 5 & & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 6 & \\ -4y + 5z = -17 & \\ 4y - 5z = -7 & \oplus \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 6 \\ -4y + 5z = -17 \\ 0y + 0z = -24 \end{cases}$$

Como a última equação do sistema é sempre falsa, então o sistema é impossível e S = ∅.

c) Vamos escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 4z = 19 \\ x - y + 5z = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} .\ (-3) \\ \oplus \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} .(-2) \\ \oplus \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - 2z = 9 \\ y + 2z = -9 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \oplus \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - 2z = 9 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

A última equação do sistema escalonado é verdadeira para qualquer valor real de y e z. Assim, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções.

Eliminado a última equação do sistema escalonado, temos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - 2z = 9 \end{cases}$$

O sistema está escalonado e m < n. Logo, ele é possível e indeterminado.

Para resolver um sistema indeterminado, procedemos do seguinte modo:

- Consideramos o sistema em sua forma escalonada.
- Calculamos o grau de indeterminação do sistema nessas condições:

  GI = n – m = 3 – 2 = 1

Como o grau de indeterminação é 1, atribuímos a uma das incógnitas um valor $\propto$, supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor. Sendo z = $\propto$ e substituindo esse valor na 2ª equação, obtemos:

$- y - 2\propto = 9 \Rightarrow y = -2\propto - 9$

Substituindo z = $\propto$ e y = - 2$\propto$ - 9 na 1ª equação, temos:

$x – 2(- 2\propto - 9) + 3\propto = 5 \Rightarrow x + 4\propto + 18 + 3\propto\ 5 \Rightarrow x = - 7\propto - 13$

Portanto, S = {(- 7$\propto$ - 13, - 2$\propto$ - 9, $\propto$)}.

d) Vamos escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=6 & .(-2) \\ 2x+y-z=1 & \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ -y-3z=-11 \end{cases}$$

O sistema está escalonado e m < n. Logo, ele é possível e indeterminado.

$$GI = n - m = 3 - 2 = 1$$

De maneira análoga ao exercício anterior vamos resolver o sistema:

$z = \alpha$

$- y - 3\alpha = - 11 \Rightarrow - y = 3\alpha - 11 \Rightarrow y = 11 - 3\alpha$

$x + y + z = 6 \Rightarrow x + 11 - 3\alpha + \alpha = 6 \Rightarrow x - 2\alpha = 6 - 11 \Rightarrow x = 2\alpha - 5$

Portanto, $S = \{(2\alpha - 5, 11 - 3\alpha, \alpha)\}$.

Exercício Proposto

Classifique e resolva os sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+2y-2z=-5 \\ 3x-y+3z=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-4y=7 \\ 3x+y=3 \\ 5x+3y=34 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+z=7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{2y} = \dfrac{2y+1}{2x+3} = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+3y=1 \\ y+2z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$

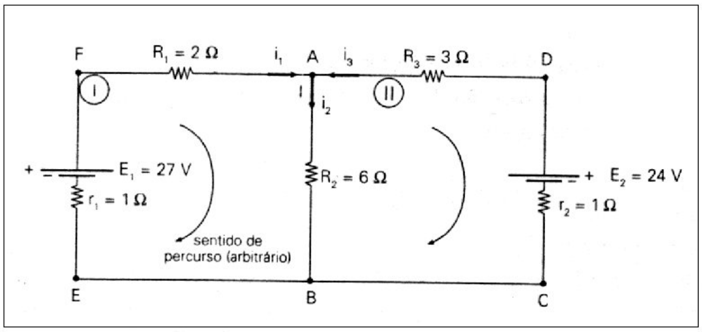
CONTEXTOS, APLICAÇÕES INTERDISCIPLINARIDADE

Uma seção para você ligar a Matemática à realidade da vida e da sociedade

Matrizes, Sistemas Lineares, Eletricidade e Livros

No exemplo 1 vamos calculara as correntes de um circuito elétrico usando os conceitos matemáticos de matrizes e sistemas lineares. No exemplo 2, vamos calcular os preços de três livros de Matemática de uma determinada livraria com sede e duas filiais e novamente esses conceitos devem ser usados.

Exemplo 1



Esse circuito possui:

- Dois geradores de forças eletromotrizes (fem) $E_1 = 27V$ e $E_2 = 24V$ e resistências internas r1 = 1Ω;
- Três resistores: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 6\Omega$ e $R_3 = 3\Omega$.

Observação: A unidade de medida de fem é o volt (V); a unidade de medida de resistência elétrica é o ohm (Ω).

Resolver um circuito elétrico significa determinar as intensidade das correntes elétrica que nele circulam; a unidade de medida da corrente elétrica é o ampère (A).

Nesse circuito, temos rês correntes, representadas por i_1, i_2 e i_3.

Para calcular suas intensidade, vamos montar o sistema a seguir, que resulta da aplicação das 1ª e 2ª leis de Kirchhoff no circuito da figura acima.

Observação: Essas lei são vistas detalhadamente no estudo de Eletrodinâmica, que pertence à Física.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i + 6i_2 \quad = 27 \\ \quad -6i_2 - 4i_3 = -24 \end{cases}$$

Aplicando a regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -54 \qquad D_{i_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 27 & 6 & 0 \\ -24 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -126$$

$$D_{i_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 27 & 0 \\ 0 & -24 & -4 \end{vmatrix} = -180 \qquad D_{i_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 27 \\ 0 & -6 & -24 \end{vmatrix} = -54$$

Assim:

$i_1 = \dfrac{D_{i_1}}{D} = \dfrac{-126}{-54} \Rightarrow \mathbf{i_1 = \dfrac{7}{3}\,A}$, $i_2 = \dfrac{D_{i_2}}{D} = \dfrac{-180}{-54} \Rightarrow \mathbf{i_2 = \dfrac{10}{3}\,A}$ e $i_3 = \dfrac{D_{i_3}}{D} = \dfrac{-54}{-54} \Rightarrow \mathbf{i_3 = 1A}$

Logo, as correntes do circuito são $\mathbf{i_1 = \dfrac{7}{3}\,A,\ i_2 = \dfrac{10}{3}\,A}$ e $\mathbf{i_3 = 1A}$

Exemplo 2

Uma coleção de livros de Matemática para o ensino médio é representada por três livros:

- **M_1** é do 1º ano;
- **M_2** o do 2º ano;
- **M_3** o do 3º ano.

As livrarias A, B e C, em um relatório sobre as vendas diárias, apresentam os seguintes resultados num determinado dia:

Livraria	**Total de vendas**	**Valor total recebido**
A	$1M_1$ $2M_2$ $3M_3$	R$ 111,00
B	$2M_1$ $1M_2$ $2M_3$	R$ 88,00
C	$3M_1$ $2M_2$ $5M_3$	R$ 181,00

Com base nesse relatório, determine os preços dos livros M_1, M_2 e M_3.

Solução:

Se M_1 custar **x** reais, M_2 custar **y** reais e M_3 custar **z** reais, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 111 \\ 2x + 1y + 2z = 88 \\ 3x + 2y + 5z = 181 \end{cases}$$

Escalonando o sistema teremos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 111 \\ \quad y + z = 38 \\ \qquad z = 20 \end{cases}$$

Assim, z = 20, y = 18 e x = 15.

Logo, $\mathbf{M_1}$ custará R$ 15,00; $\mathbf{M_2}$ custará R$ 18,00 e $\mathbf{M_3}$ custará R$ 20,00.

NÚMEROS COMPLEXOS: INTRODUÇÃO, ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Introdução

Sabemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, sendo o conjunto $\mathbb{R}$ o mais amplo que conhecemos até agora. Nele não podemos resolver equações do 2º grau em $\Delta < 0$, como $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$, $x^2 + 5x + 7 = 0$, isto é, não há solução em $\mathbb{R}$ para essas equações.

Durante muitos séculos essas equações ficaram sem solução até que Raffaeli Bombeli, em 1572, publicou seu tratado de Álgebra, falando sobre raízes quadradas de números negativos.

Assim, começava a surgir um novo conjunto, chamado de conjunto dos números complexos e representando por $\mathbb{C}$ e no qual aquelas equações ($\Delta < 0$) não tinham solução.

Criou- se também o símbolo **i** (pois esses números eram chamados imaginários) para ser usado no lugar de $\sqrt{-1}$

Vamos, então, resolver algumas equações em $\mathbb{C}$ para exemplificar.

a) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = +i$ ou $x = -i$

S = {- i, i}

b) $x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25(-1)}$ $x = \pm 5i$

S = {-5i, 5i}

c) $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = \dfrac{2(1 \pm i)}{2} = 1 \pm i$

S = {1 - i, 1 + i}

Números como **i**, 2i, -3i, 2 +3i, 4 – 2i são exemplos de números complexos, ou seja, todo número da forma z = a +bi ((a, b $\in \mathbb{R}$ e i = $\sqrt{-1}$) é um número complexo:

$$\mathbb{C} = \{z \,/\, z = a + bi,\ a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

Sendo **a** a parte real (R) e **bi** a parte imaginária (Im).

Dessa forma, podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Observações:

1ª) $i^2 = -1$
2ª) $z = a + bi$ é chamado forma algébrica do número complexo.
3ª) Se $a = 0$, então $z = bi$, que chamamos de número imaginário puro, ou simplesmente, número imaginário.
4ª) Se $b = 0$, $z = a$ é real.

Igualdade de números complexos

Dois números complexos são iguais se, e somente têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária:

$$\mathbf{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

Adição e subtração de números complexos

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos por definição:

a) $z_1 + z_2 = \underbrace{(a + c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b + d)i}_{\text{parte imaginária}}$

a) $z_1 - z_2 = \underbrace{(a - c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b - d)i}_{\text{parte imaginária}}$

Veja os exemplos:

- $z_1 = 3 - 5i$ e $z_2 = 4 + 4i \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (3+4) + (-5+4)\,i = 7 - i \\ z_1 - z_2 = (3-4) + (-5-4)\,i = -1 - 9i \end{cases}$

- $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -2 + 4i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (2-2) + (+4) = 7i \\ z_1 - z_2 = (2+) + (3-4)i = 4 - i \\ 2z_1 - 3z_2 = 2(2+3) - 3(-2+4i) = 4 + 6i + 6 - 12i = 10 - 6i \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine p para que $z = (2p + 7) + 3i$ seja imaginário puro.

Solução:

Devemos ter: $a = 2p + 7 = 0 \Rightarrow p = -\dfrac{7}{2}$

2. Sejam os números complexos $z_1 = k + 3i$ e $z_2 = 3 - mi$. Determine k e m para que $z_1 + z_2 = 2(5+2i)$.

Solução:

$$z_1 + z_2 = k + 3i + 3 - mi = \underbrace{(k+3)}_{R} + \underbrace{(3 . m)}_{Im}\, i = 2(5 + 2) = \underbrace{10}_{R} + \underbrace{4i}_{Im}$$

Logo, $\begin{cases} k + 3 = 10 \Rightarrow k = 7 \\ 3 - m = 4 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$

Exercícios Propostos

1. Resolva em C as equações:

a) $x^2 + 36 = 0$ b) $x^2 + 7x + 10 = 0$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

2. Encontre a de modo que $z = (a^2 - 4) + (a - 2)i$ seja imaginário puro.

3. Determine os números reais m e n tal que $(m + n) + (m - n)i = 4 + 2i$.

4. O número complexo $z = x + (x^2 - 4)i$ é real se, e somente se:

a) $x = 0$. b) $x \neq 0$. c) $x = \pm 2$. d) $x \neq \pm 2$. e) $x \neq 0$ e $x \neq \pm 2$.

5. Determine k e m para que $z_1 - z_2 = 3 + 2i$, sendo $z_1 = k + mi$ e $z_2 = 2 - 2i$.

6. Se $z_1 = 2 + mi$ e $z_2 = 3 + 4i$, obtenha m tal que $z_2 - z_1 = z_1 - 1 - 3i$.

7. Sendo $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 - i$ e $z_3 = 4 - 2i$, determine:

a) $z_1 - 2z_2 - z_3$ b) $2z_1 - 3(z_3 - z_2)$

NÚMEROS COMPLEXOS: MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Multiplicação de números complexos

Dados dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos por definição:

$z_1z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bci - bd \Rightarrow z_1z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Exemplos:

- $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 – 2i$

$z_1z_2 = (2 + 3i)(-1 + 2i) = -2 – 3i + 4i + 6i^2 = -2 – 3i + 4i – 6 = -8 + i$

- $z_1 = 1 – i$ e $z_2 = 3 +4i$

$z_1z_2 = (1 - i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 3i - 4i^2 = 3 + 4i - 3i + 4 = 7 + i$

Conjugado

Chamamos de conjugado de $z = a + bi$ o número complexo, indicado por $\bar{z}$, tal que:

$$\bar{z} = a – bi$$

Veja:

- $z_1 = 2 – 2i \Rightarrow \overline{z_1} = 2 + 2i$

$z_2 = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z_2} = 3 – 4i$

$z_3 = -5 +2i \Rightarrow \overline{z_3} = -5 –2i$

Na prática, para obter o conjugado de um número complexo, trocamos o sinal do coeficiente da parte imaginária.

Observações: Sendo $z = a + bi$, temos:

1ª) $z + \bar{z}$ é sempre real, pois $z + \bar{z} = a + bi + a – bi = 2^a$.

2ª) $z - \bar{z}$ é sempre imaginário puro, pois $z - \bar{z} = a + bi – (a – bi) = a +bi – a + bi = 2bi$.

3ª) $z\bar{z}$ é sempre real não-negativo, pois $z\bar{z} = (a + bi)(a – bi) = a^2 – \cancel{abi} + \cancel{abi} – b^2i^2 = a^2 – b^2i^2 = a^2 +b^2$.

Propriedades

1ª) Se $z = a + bi$, então $\bar{z} = a – bi \Rightarrow \bar{\bar{z}} = \overline{a – bi} = a + bi$: $\bar{\bar{z}} = z$.

2ª) O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

3ª) O conjugado do produto é igual ao produto ao produto dos conjugados: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

4ª) O conjugado de uma potência é igual à potência do conjugado: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Divisão de números complexos

Dados dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, para obter a forma algébrica do quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\overline{z_2}$ (conjugado do denominador).

Esse procedimento, além de não alterar o valor de $\dfrac{z_1}{z_2}$, permite eliminar a parte imaginária do denominador (pois $z_2\overline{z_2}$ é real), obtendo, desse modo, a forma algébrica. Observe o exemplo.

Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 3i$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4+3i} = \frac{2+3i}{4+3i}.\frac{4-3i}{4-3i} = \frac{8-6i+12i-9i^2}{16-9i^2} = \frac{17+6i}{16+9} = \frac{17}{25} + \frac{6}{25}.i$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine o complexo x tal que (1 i) z –(1 + 2)$\overline{z}$ = 7 + 3i.

Solução:

Sendo $z = a + bi$, temos $\overline{z} = a - bi$

Substituindo na equação, vem:

$(1 + i)(a + bi) - (1 + 2i)(a - bi) = 7 + 3i \Rightarrow \cancel{a} + bi + ai - b - \cancel{a} + bi - 2ai - 2b = 7 + 3i \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3b + (2b - a)\,i = 7 + 3i \Rightarrow \begin{cases} -3b = 7 \\ 2b - a = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $b = -\dfrac{7}{3}$ e $a = -\dfrac{23}{3}$. Logo, $z = -\dfrac{23}{3} - \dfrac{7}{3}.\,i$

2. Efetue:

a) $\dfrac{2-i}{1+i}$ b) $\dfrac{1-i}{2+i} + \dfrac{3+i}{1-2i}$

Solução:

$$\text{a) } \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}.\,i$$

$$\text{b) } \frac{1-i}{2+i} + \frac{3+i}{1-2i} = \frac{1-i}{2+i}.\frac{2-i}{2-i} + \frac{3+i}{1-2i}.\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2-i-2i-1}{4+1} + \frac{3+6i+i-2}{1+4} = \frac{1-3i}{5} + \frac{1+7i}{5} =$$

$$= \frac{2+4i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}.i$$

Exercícios Propostos

1. Calcule:

a) $\frac{3-2i}{-1+i}$ b) $\frac{2+3i}{i}$ c) $\frac{3-4i}{2i}$ d) $\frac{2-3i}{4-5i} - \frac{2+3i}{4+5i}$

2. Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = 1 - 2i$. Como $z_1z_2 = 15$, então $z_1 + z_2$ é igual a:

a) 8. b) 4. c) 4 + 4i. d) 6 + i. e) 8 – 2i.

3. A divisão $\frac{1+2i}{1-i}$ dá como resultado o número:

a) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}.i$ b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}.\ i$ c) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}.\ I$ d)) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}.\ i$ e) –1 + 3i.

4. O quociente de z = 3 + 2i por w = 1 + i é:

a) 3 + 2i. b) 3 – i. c) 5 – i. d) $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\ .\ i$. e) $\frac{3}{2}$ - i.

5. Se $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 + 4i$, calcule:

a) $z_1 . \overline{z_2}$. B) $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$

6. Se $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + i$ e $z_3 = 1 + i$, calcule $\frac{z_1.z_2}{z_3}$.

NÚMEROS COMPLEXOS: POTÊNCIAS DE i E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Potência de i

Estudando as potências de i(i^n, $n \in \mathbb{N}$), temos:

$i^0 = 1$	$i^6 = i^4i^2 = 1(-1) = -1$
$i^1 = i$	$i^7 = i^4i^3 = 1\ (-1) = -i$
$i^2 = -1$	$i^8 = i^4i^4 = 1\ .\ 1 = 1$
$i^3 = i^2i = -i$	$i^9 = i^8i = 1\ .\ i = i$

$i^4 = i^2i^2 = -1(-1) = 1$ $\qquad$ $i^{10} = i^8i^2 = 1(-1) = -1$

i5 = i4i = 1 . i = i $\qquad$ $i^{11} = i^{10}i = -1 \cdot i = -i$

Então, podemos escrever:

$$\begin{cases} i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1 \\ i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i^{4n}i = 1.i = i \\ i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = i^{4n}i^2 = 1(-1) = -1 \\ i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = i^{4n}i^3 = 1(-i) = -i \end{cases}$$

Portanto, para determinar uma potência de i superior a 4, basta dividir o expoente de i por 4 e considerar apenas **i** elevado ao resto dessa divisão. Veja:

- i^9

  $9 \,\underline{|4}$ $\rightarrow i^9 = i^{2.4+1} = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$

  1 2

- i^{82}

  $82 \,\underline{|4}$ $\rightarrow i^{82} = i^2 = -1$

  2 20

- i^{123}

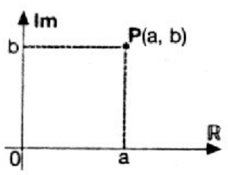
  $123 \,\underline{|4}$ $\rightarrow i^{123} = i^3 = -i$

  03 30

Representação gráfica de um número complexo

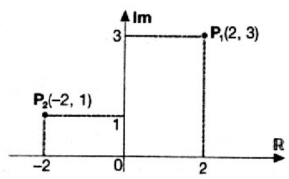
Para representar o número complexo z = a + bi num plano (chamado de Argand-Gauss), marcamos o coeficiente da parte real no eixo **Ox** e o coeficiente da parte imaginária no eixo **Oy**.

Veja:



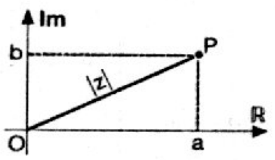
$$\begin{cases} \text{R} \rightarrow \text{eixo rea } (\mathbf{Ox}) \\ \text{Im} \rightarrow \text{eixo imaginário } (\mathbf{Oy}) \\ \text{P(a, b)} \rightarrow \text{imagem geométrica ou afixo do complexo } z = a + bi \end{cases}$$

Por exemplo, se $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -2 + i$, $\mathbf{P_1}$ (2, 3) é o afixo de z_1 e $\mathbf{P_2}$ (-2, 1) é o afixo de z_2. Então, representação desses números é:



Módulo

O módulo ($|z|$) de um número complexo é a distância de seu afixo à origem do plano de Argand-Gauss. Assim, se **P**(a, b) e **O**(0, 0), temos:



$|z| = d_{OP} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Veja alguns exemplos:

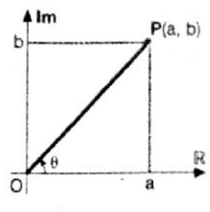
- $z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
- $z = -5i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

Argumento

Argumento de um número complexo (arg (z)) é o número θ ($0 \leq \theta < 360°$) tal que:

$$\textbf{sen}\ \theta = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{z}|} \qquad \text{e} \qquad \textbf{cos}\ \theta = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{z}|} \qquad (z \neq 0)$$

O ângulo θ é considerado no sentido anti-horário, a partir do eixo real (parte positiva) até encontrar $\overline{OP}$.



Exercícios Resolvidos

1. Calcule $\frac{i^{243} - i^{28}}{i^{13}}$.

Solução:

- $i^{243} = i^3 = -i$
- $i^{28} = i^0 = 1$

$$\frac{i^{243} - i^{28}}{i^{13}} = \frac{-i-1}{i} = \frac{(-i-1)(-i)}{-i^2} = \frac{i^2 + i}{-i^2} = \frac{-1+i}{1} = -1 + i$$

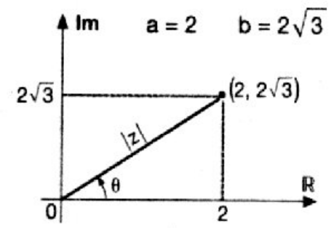
- $i^{13} = i^1 = i$

2. Represente graficamente e determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

a) $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ b) $w = 1 - i$

Solução:

a) • Representação gráfica



• Módulo

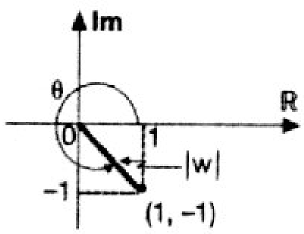
$| z | = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$

• Argumento:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como 2 + $2\sqrt{3}\,i$ está no 1° quadrante (0 < θ < 90°), então θ = 60°.

a) • Representação gráfica



• Módulo

$| w | = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

• Argumento:

Como 1- i está no 4° quadrante, 270° < θ < 360°. Assim:

$\cos\theta = \dfrac{a}{|w|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 315°$

Exercícios Propostos

1. Calcule:

a) i^{107} b) $i^{100} - i^{200}$ c) $\dfrac{i^{33} - i^{100}}{i^{12}}$ d) $\dfrac{i^{8} + i^{21}}{i^{19}}$ e) $\dfrac{i^{321}}{i^{18}}$

2. A expressão $\dfrac{i^{31} - i^{110}}{i^{13}}$ é equivalente a:

a) 1 – i . b) –1 + i. c) 1 + i. d) i. e) – 1 – i.

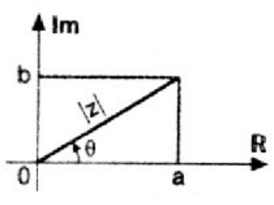
3. Represente graficamente e determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos.

a) z = 1 +i b) z = - 1 + i c) z = $\sqrt{3}$ + i. d) z = -1 + $\sqrt{3}\,i$

e) z = -2i f) z = 4 g) z = 2 +2i h) z = -1 - $\sqrt{3}$

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja um número complexo z = a + bi, $z \neq 0$.



Sendo o ângulo θ em radianos, temos:

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| . \cos\theta$ (1)

$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| . \text{sen}\,\theta$ (2)

Substituindo (1) em (2) em z = a + bi, temos:

$$z = |z| .\cos\theta + i . |z| . \text{sen}\,\theta \Rightarrow \mathbf{z = |z| . (\cos\theta + i . \text{sen}\,\theta)}$$

Que é a forma trigonométrica ou polar de um número complexo.

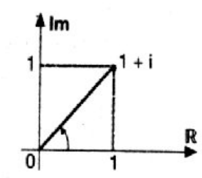
Exercícios Resolvidos

1. Passe para a forma trigonométrica

a) z = 1 + i b) $z = -1 + \sqrt{3}\,i$.

Solução:

a) z = 1 + i é um complexo que tem representação gráfica no 1° quadrante:



Assim:

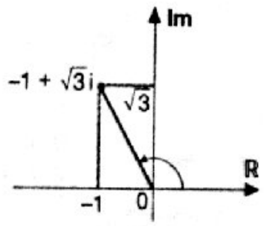
$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta \ \frac{\pi}{4}\text{rad } (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

Então:

$z = |z| . (\cos\theta + i . \text{sen}\,\theta) = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} + i . \text{sen}\,\frac{\pi}{4})$

b) z = - 1 + $\sqrt{3}$ i tem representação gráfica no 2° quadrante ($\frac{\pi}{2}$ rad < θ < π rad):



Assim:

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$ rad $(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi)$

Então:

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

2. Dê a forma trigonométrica de z = $(1 + i)^4$.

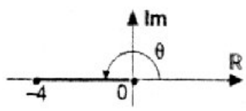
Solução:

$(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

Logo, $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$

Se $z = (1 + i)^4 = -4$, então a = -4 e b = 0.

Logo, sua representação gráfica é:



Assim, $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$ e $\theta = \pi$ rad.

Então: $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 4(\cos\pi + i \cdot \text{sen}\,\pi)$

Exercícios Propostos

1. Passe para a forma trigonométrica:

a) 2 – 2i b) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ c) –i d) -4

e) $-2\sqrt{3} - 2i$ f) $\frac{2(2+3i)}{1-5i}$ g) 5i

2. Dado $z = \dfrac{4-3i}{3+4i}$, determine:

a) seu argumento e seu módulo; b) a forma trigonométrica de z.

3. O número complexo $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, na forma trigonométrica, é:

a) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i \, . \, \text{sen}\,\frac{\pi}{6})$.
b) $2(\cos\frac{\pi}{4} + i \, . \, \text{sen}\,\frac{\pi}{4})$.
c) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i \, . \, \text{sen}\,\frac{\pi}{3})$.
d) $2(\cos\frac{3\pi}{4} + i \, . \, \text{sen}\,\frac{3\pi}{4})$.
e) $2(\cos\frac{5\pi}{4} + i \, . \, \text{sen}\,\frac{5\pi}{4})$.

4. Dê a forma trigonométrica de:

a) $z = (1 \, . \, i)^2$ b) $z = (1 + \sqrt{3}i)^2$ c) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$

5. O módulo e o argumento de z = 3i valem respectivamente:

a) 3 e π b) 9 e 2π c) 3 e $\frac{\pi}{2}$ d) 3 e $-\frac{\pi}{2}$ e) nda

6. Qual a forma trigonométrica de um número complexo de módulo 5 e o argumento $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$?

7. Se u = 3 + 2i e v = 1 + i, então $|u+v|$ é:

a) 5. b) $\sqrt{26}$ c) $\sqrt{29}$ d) 7. e)15.

8. O módulo do número complexo $(1 + 3i)^4$ é :

a) 256. b) 100. c) 81. d) 64. e) 16.